Stohastička analiza

-skripta-

Danijela Rajter-Ćirić

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Novi Sad 2005

U ovoj skripti izložene su osnove teorije stohastičke analize. Uveden je pojam stohastičkog procesa i opisani neki specifični tipovi takvih procesa. Posebna glava je posvećena Vinerovom procesu i procesu belog šuma, obzirom da oni imaju veoma veliku primenu. U skripti su takodje obradjeni i pojmovi stohastičkog integrala i stohastičkog diferencijala, te je time data osnova stohastičkog diferencijalnog kalkulusa. Na kraju skripte su izložene osnove teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina. Podrazumeva se da čitalac dobro poznaje teoriju verovatnoće i pojmove kao što su: prostor verovatnoća, slučajna promenljiva, očekivanje, kovarijansa, karakteristična funkcija, itd...

Autor se nada da će ova skripta pomoći svima koji su zainteresovani da savladaju osnovne probleme koji se javljaju u stohastičkoj analizi.

Sadržaj

GLAVA 1

Osnovi teorije stohastičkih procesa

1. Definicija i osnovni pojmovi

Neka je I proizvoljan neprazan skup indeksa i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Familija $\{X_t \; ; \; t \in I\}$ $\mathbb{R}^d$-vrednosnih slučajnih promenljivih se zove *stohastički* ili *slučajni proces* sa parametarskim skupom I i sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ (kažemo još i $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces).

Ako je I konačan skup onda jednostavno radimo sa konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je $I = \mathbb{Z}$ ili $I = \mathbb{N}$ tada govorimo o stohastičkom (slučajnom) nizu ili stohastičkom (slučajnom) redu.

U daljem tekstu će I uvek biti interval $[t_0, T]$ na realnoj osi $\mathbb{R}$. Parametar t ćemo interpretirati kao vreme (mada u opštem slučaju to ne mora da bude vreme) i pri tome uključujemo i slučajeve $t_0 = -\infty$ i $T = \infty$.

Na osnovu definicije vidimo da stohastički proces $\{X_t; \; t \in [t_0, T]\}$ zavisi od dve promenljive $t \in [t_0, T]$ i $\omega \in \Omega$. Promenljiva ω se, kao i kod slučajnih promenljivih, obično ne piše pa stoga stohastički proces označavamo sa $X(t)$ ili X_t.

Ako je $\{X_t; \; t \in [t_0, T]\}$ $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces tada je, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$, $X_t(\cdot)$ jedna $\mathbb{R}^d$-vrednosna slučajna promenljiva. Ukoliko fiksiramo $\omega \in \Omega$, tada je $X_{\cdot}(\omega)$ jedna $\mathbb{R}^d$-vrednosna funkcija definisana na intervalu $[t_0, T]$, dakle element prostora $(\mathbb{R}^d)^{[t_0, T]}$. Ova funkcija se zove *trajektorija* ili *realizacija* $\mathbb{R}^d$-vrednosnog stohastičkog procesa $\{X_t; \; t \in [t_0, T]\}$.

Konačno dimenzionalne raspodele $\mathbb{R}^d$-vrednosnog stohastičkog procesa $\{X_t;\ t \in [t_0, T]\}$ su date sa:

$$\begin{aligned}
P\{X_t < x\} &= F_t(x) \\
P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2\} &= F_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \\
&\vdots \\
P\{X_{t_1} < x_1, \ldots, X_{t_n} < x_n\} &= F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

gde $t, t_i \in [t_0, T]$, $i = 1, 2, \ldots$, i $x, x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \ldots$.

Sistem funkcija raspodele zadovoljava dva uslova:

(a) *uslov simetrije*

Ako $\{i_1, \ldots, i_n\}$ jeste jedna permutacija brojeva od 1 do n tada važi

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

(b) *uslov kompatibilnosti*

Ako je $m < n$ za proizvoljne $t_{m+1}, \ldots, t_n \in [t_0, T]$ važi da je

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1, \ldots, x_m).$$

Teorema 1.1. *(Kolmogorovljeva fundamentalna teorema)*

Za svaku familiju funkcija raspodela koja zadovoljava uslove simetrije i kompatibilnosti postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i stohastički proces* X_t *definisan na njemu koji ima date raspodele kao svoje konačno dimenzionalne raspodele.*

Dva stohastička procesa X_t i $\bar{X}_t$ koja su definisana na istom prostoru verovatnoća su *ekvivalentna* ili *stohastički ekvivalentna* ako, za svako $t \in [t_0, T]$, imamo da je $X_t = \bar{X}_t$ sa verovatnoćom 1. U tom slučaju se proces $\bar{X}_t$ zove *verzija* procesa X_t i obrnuto. Konačno dimenzionalne raspodele dva ekvivalentna stohastička procesa se poklapaju.

Trajektorije dva ekvivalentna stohastička procesa mogu imati potpuno različite analitičke osobine (npr, jedan proces može imati skoro svuda neprekidne trajektorije, a drugi ne).

Stohastički proces je *strogo stacionaran* ako su njegove konačno dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na vreme t, to jest, ako za $t_i, t_i + t \in [t_0, T]$, $i = 1, 2, \ldots$, važi

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+t,\ldots,t_n+t}(x_1, \ldots, x_n).$$

Ako dodatno pretpostavimo da je $X_t \in L^2$ za svako t (u opštem slučaju je $t \in \mathbb{R}$), sledi da je očekivanje tog procesa $E(X_t) = m = const$ i kovarijansa $Cov(X_t, X_s) = C(t - s)$. Za proces sa poslednje dve osobine kažemo da je *stacionaran u širem smislu*.

Ako je ovakav proces i srednje-kvadradno neprekidan, to jest, ako ima osobinu da je

$$\lim_{t\to s} E(|X_t - X_s|^2) = 0,$$

tada kovarijansna matrica C ima oblik

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u)\, du, \quad -\infty < t < \infty,$$

gde se $d \times d$ matrica $F(u) = (F_{ij}(u))$ zove *spektralna funkcija raspodele procesa* X_t. Ako funkcija raspodele F ima gustinu, ona se zove *spektralna gustina procesa* X_t.

$\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces ze zove *Gausovski proces* ako su njegove konačno dimenzionalne raspodele normalne. Gausovski proces je stacionaran i u širem i u strogom smislu.

2. Martingali

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, neka je $\{X_t;\ t \in [t_0, T]\}$ jedan $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces definisan na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$ jedna rastuća familija subsigma algebri od $\mathcal{F}$, odnosno

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \ \text{ za } t_0 \le s \le t \le T.$$

Ako je X_t $\mathcal{F}_t$-merljivo i integrabilno za svako $t \in [t_0, T]$, tada se par $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$ (ili samo proces X_t) zove *martingal* ako važi

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \ \text{ skoro sigurno},$$

za sve $s, t \in [t_0, T]$, $s \leq t$.

Drugačije to možemo zapisati na sledeći način:

Ako je $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, $t_i \in [t_0, T]$, $i = 1, \dots, n+1$, $n \geq 1$, tada je X_t martingal ako

$$E(X_{t_{n+1}}|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = X_{t_n}, \ \text{ skoro sigurno.}$$

Kako bismo dobili intuitivnu predstavu o martingalima, daćemo sledeći primer:

Ako je X_{t_i} sreća da kockar pobedi u i-toj igri onda je očekivana sreća da pobedi u $(n+1)$-voj igri ista kao u prethodnoj, n-toj igri. Dakle, martingal na neki način ilustruje "fair-play".

Ako je X_t realni proces i ako u gornjoj jednakosti zamenimo $=$ sa $\leq$ ili sa $\geq$ onda dobijamo *supermartingal* ili *submartingal*.

Neka su X_t i Y_t dva martingala u odnosu na istu monotonu familiju subsigma algebri $\mathcal{F}_t$. Tada je i $AX_t + BY_t$ (A i B su fiksirane $d \times d$ matrice) martingal i specijalno, $X_t - X_{t_0}$ je martingal.

Martingal X_t je submartingal ako je $-X_t$ supermartingal.

3. Markovski procesi

Osnovni princip koji leži u procesima Markova jeste: *budućnost je nezavisna od prošlosti kada znamo sadašnjost.* Intuitivno, Markovska osobina kaže sledeće: Ako je poznato stanje sistema u nekom vremenskom trenutku s (sadašnjost) tada dodatne informacije koje se odnose na ponašanje sistema u trenucima $t < s$ (prošlost) ne utiču na naše poznavanje razvoja sistema za $t > s$ (budućnost).

Za $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, označimo sa

$$\mathcal{F}([t_1, t_2]) = \mathcal{F}(X_t \ ; \ t_1 \leq t \leq t_2)$$

najmanju subsigma algebru od $\mathcal{F}$ u odnosu na koju su sve slučajne promenljive X_t, $t_1 \leq t \leq t_2$, merljive. Dakle, na neki način $\mathcal{F}([t_1, t_2])$ "sadrži" istoriju procesa X_t od trenutka t_1 do trenutka t_2.

Konačno dajemo definiciju Markovskog procesa:

Definicija 1.1. *$\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se zove Markovski proces ako zadovoljava takozvani Markovsku osobinu:*

Za $t_0 \leq s \leq t \leq T$ i svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}^d$

$$P(X_t \in B | \mathcal{F}([t_0, s])) = P(X_t \in B | X_s),$$

važi sa verovatnoćom 1.

Teorema 1.2. *Svaki od sledećih uslova je ekvivalentan Markovskoj osobini:*

(a) *Za $t_0 \leq s \leq t \leq T$ i $A \in \mathcal{F}([t, T])$*

$$P(A | \mathcal{F}([t_0, s])) = P(A | X_s).$$

(b) *Za $t_0 \leq s \leq t \leq T$ i Y $\mathcal{F}([t, T])$-merljivo i integrabilno*

$$E(Y | \mathcal{F}([t_0, s])) = E(Y | X_s).$$

(c) *Za $t_0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$ i $A_1 \in \mathcal{F}([t_0, t_1])$ i $A_2 \in \mathcal{F}([t_2, T])$*

$$P(A_1 \cap A_2 | X_t) = P(A_1 | X_t) P(A_2 | X_t).$$

(d) *Za $n \geq 1$, $t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq t \leq T$ i $B \in \mathcal{B}^d$*

$$P(X_t \in B | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = P(X_t \in B | X_{t_n}).$$

Neka je X_t, $t_0 \leq t \leq T$, Markovski proces. Postoji uslovna raspodela $P(s, X_s, t, B)$ koja odgovara uslovnoj verovatnoći $P(X_t \in B | X_s)$.

Funkcija $P(s,x,t,B)$ je funkcija četiri argumenta: $s,t \in [t_0,T]$, $s \le t$, $x \in \mathbb{R}^d$ i $B \in \mathcal{B}^d$. Ona ima sledeće osobine:

(a) Za fiksirano $s \le t$ i $B \in \mathcal{B}^d$, sa verovatnoćom 1 važi

$$P(s,X_s,t,B) = P(X_t \in B|X_s).$$

(b) $P(s,x,t,\cdot)$ je verovatnoća na $\mathcal{B}^d$, za fiksirano $s \le t$ i $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) $P(s,\cdot,t,B)$ je $\mathcal{B}^d$-merljivo za fiksirano $s \le t$ i $B \in \mathcal{B}^d$.

(d) Za $t_0 \le s \le u \le t \le T$ i $B \in \mathcal{B}^d$ i za sve $x \in \mathbb{R}^d$ (sa mogućim izuzećem skupa $N \subset \mathbb{R}^d$ takvog da je $P(X_s \in N) = 0$) važi Čepman-Kolmogorova jednačina:

$$P(s,x,t,B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(u,y,t,B)\, P(s,x,u,dy). \tag{1}$$

Uvek je moguće izabrati $P(s,x,t,B)$ tako da važi uslov

(e) Za sve $s \in [t_0,T]$ i $B \in \mathcal{B}^d$ je $P(s,x,s,B) = I_B(x)$, gde je I_B indikator skupa B.

Poslednja tvrdnja sledi iz činjenice da

$$P(X_s \in B|X_s) = I_{[X_s \in B]}$$

za sve vrednosti $X_s = x$.

Funkcija $P(s,x,t,B)$ koja zadovoljava (b)-(e) se zove *verovatnoća prelaza*. Ako je X_t Markovski proces i $P(s,x,t,B)$ verovatnoća prelaza koja zadovoljava uslov (a), tada se $P(s,x,t,B)$ zove verovatnoća prelaza Markovskog procesa. To je, za fiksirano $s,t \in [t_0,T]$, $s \le t$, jedinstveno definisana funkcija od x i B sa mogućim izuzetkom na skupu N vrednosti x (nezavisno od B) gde je $P[X_s \in N] = 0$.

Koristićemo sledeću notaciju

$$P(s,x,t,B) = P(X_t \in B|X_s = x)$$

što je verovatnoća da proces X_t bude u trenutku t u skupu B ako je u trenutku s $(s \le t)$ bio u stanju x. Broj $P(X_t \in B|X_s = x)$ je potpuno odredjen (definisan) gornjom jednakošću, čak i u slučaju da uslov $X_s = x$ ima verovatnoću nula.

Značaj verovatnoća prelaza za Markovske procese jeste što se njegove konačno dimenzionalne raspodele mogu dobiti iz njih i iz početne raspodele procesa u trenutku t_0. Naime, važi sledeće tvrdjenje:

Teorema 1.3. *Neka je X_t Markovski proces sa parametarskim skupom $[t_0, T]$, $P(s, x, t, B)$ verovatnoća prelaza tog procesa i P_{t_0} raspodela za X_{t_0}, to jest, $P_{t_0}(A) = P[X_{t_0} \in A]$. Tada, za konačno dimenzionalne raspodele*

$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n],\ t_0 \le t_1 < \cdots < t_n \le T,\ B_i \in \mathcal{B}^d, i = 1, \dots, n,$

važi

$$
\begin{aligned}
&P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = \\
&\int_{\mathbb{R}^d} \int_{B_1} \cdots \int_{B_{n-1}} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, B_n) P(t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1} dx_{n-1}) \dots \\
&\qquad\qquad \dots P(t_0, x_0, t_1, dx_1) P_{t_0}(dx_0)
\end{aligned}
$$

i zato, specijalno,

$$P[X_t \in B] = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_0, x, t, B) P_{t_0}(dx).$$

Važi i sledeće tvrdjenje:

Teorema 1.4. *Neka je $P(s, x, t, B)$ verovatnoća prelaza, pri čemu $s, t \in [t_0, T]$. Tada, za svaku početnu raspodelu P_{t_0} na $\mathcal{B}^d$ postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i na njemu definisan Markovski proces $\{X_t;\ t \in [t_0, T]\}$ koji ima verovatnoća prelaza baš $P(s, x, t, B)$ i za koje X_{t_0} ima raspodelu P_{t_0}.*

Markovski proces $\{X_t;\ t \in [t_0, T]\}$ je *homogen* (u odnosu na vreme t) ako je njegova verovatnoća prelaza stacionarna, to jest, ako je uslov

$$P(s + u, x, t + u, B) = P(s, x, t, B)$$

identički zadovoljen za $t_0 \le s \le t \le T$ i $t_0 \le s+u \le t+u \le T$. U tom slučaju, verovatnoća prelaza je funkcija od x, $t-s$ i B. Zato je pišemo u obliku

$$P(t-s,x,B) = P(s,x,t,B), \quad 0 \le t-s \le T-t_0.$$

$P(t,x,B)$ predstavlja verovatnoću prelaza iz stanja x u skup B u trenutku t.

Za homogen Markovski proces jednačina Čepman-Kolmogorova glasi

$$P(t+s,x,B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(s,y,B)\ P(t,x,dy).$$

GLAVA 2

Vinerov proces i beli šum

1. Vinerov proces

Stohastički proces W_t, $t \geq 0$, je *d-dimenzionalni Vinerov proces* ako ima nezavisne, stacionarne i $\mathcal{N}(0,(t-s)I)$-raspodeljene priraštaje $W_t - W_s$, početnu vrednost W_0=0 i ako ima skoro sigurno neprekidne trajektorije.

Može se pokazati da je d-dimenzionalni Vinerov proces ujedno i jedan d-dimenzionalni martingal kao i da je Markovski proces. To je prostorno i vremenski homogen proces.

Skoro sve trajektorije Vinerovog procesa su neprekidne, ali nigde diferencijabilne funkcije. Za fiksiran vremenski trenutak t, nediferencijabilnost trajektorija se može objasniti ovako: Raspodela količnika $(W_{t+h} - W_t)/h$ je $\mathcal{N}(0, I/|h|)$. Kad $h \to 0$ ova raspodela divergira tako da, za svaki ograničen merljiv skup B,

$$P[(W_{t+h} - W_t)/h \in B] \to 0, \quad h \to 0.$$

Zato, diferencijalni količnik ne može konvergirati sa pozitivnom verovatnoćom ka nekoj slučajnoj promenljivoj.

2. Beli šum

Takozvani (Gausovski) beli šum, ξ_t, $-\infty < t < \infty$, se u literaturi spominje kao stacionaran Gausovski proces sa srednjom vrednošću $E(\xi_t) = 0$ i konstantnom sprektralnom gustinom na čitavoj realnoj osi. Takav proces ima spektar na kome sve frekvencije učestvuju sa istom jačinom, dakle "beli" spektar (zbog analogije sa belom svetlošću u optici koja sadrži sve frekvencije vidljive svetlosti uniformno).

Ipak, takav proces ne postoji u klasičnom smislu jer je njegova kovarijansna funkcija jednaka Dirakovoj delta distribuciji. Zato, beli šum moramo definisati kao takozvani uopšteni stohastički proces.

Neka K označava prostor svih beskonačno diferencijabilnih funkcija $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, koje su identički jednake nuli van konačnog intervala. Svaka neprekidna lenearna funkcionela Φ definisana na prostoru K zove se *uopštena funkcija* ili *distribucija*.

Uopšten stohastički (slučajni) proces je slučajna uopštena funkcija u sledećem smislu: svakom $\varphi \in K$ je dodeljena slučajna promenljiva $\Phi(\varphi)$ (drugim rečima, $\Phi(\varphi)$ je običan stohastički proces sa parametarskim skupom K) tako da važe sledeća dva uslova:

1) Funkcionela Φ je linearna na K sa verovatnoćom 1, to jest, za proizvoljne φ i ψ iz K i proizvoljne brojeve α i β imamo

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi)$$

sa verovatnoćom 1.

2) $\Phi(\varphi)$ je neprekidno u sledećem smislu: konvergencija $\varphi_{k_j} \to \varphi_k$ u prostoru K, $k = 1, \ldots, n$, implicira konvergenciju raspodele vektora $(\Phi(\varphi_{1_j}), \ldots, \Phi(\varphi_{n_j}))$ ka raspodeli $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$ u smislu konvergencije u raspodeli.

Može se pokazati da svakom "običnom" stohastičkom procesu sa neprekidnim trajektorijama odgovara uopšteni stohastički proces.

Jedna od važnih prednosti uopštenih stohastičkih procesa je što njegov izvod uvek postoji i ponovo je uopšten stohastički proces. Izvod $\dot{\Phi}$ uopštenog stohastičkog procesa Φ jeste proces definisan sa

$$\dot{\Phi}(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}).$$

Za uopšteni stohastički proces kažemo da je *Gausovski proces* ako, za proizvoljne linearno nezavisne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in K$, slučajna promenljiva $(\Phi(\varphi_1), \ldots, \Phi(\varphi_n))$ ima normalnu raspodelu.

Izvod Gausovskog uopštenog stohastičkog procesa sa očekivanjem (srednjom vrednošću) $m(\varphi)$ i kovarijansom $C(\varphi, \psi)$ je ponovo Gausovski uopšteni stohastički proces koji ima očekivanje $\dot{m}(\varphi) = -m(\dot{\varphi})$ i kovarijansu $\dot{C}(\varphi, \psi) = C(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$.

Gausovski beli šum ξ_t, $t \in \mathbb{R}$, je uopšteni Gausovski stohastički proces sa srednjom vrednošću 0 i kovarijansom

$$C_\xi(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)\, dt. \tag{2}$$

Može se pokazati da je beli šum strogo stacionaran uopšteni stohastički proces.

Veoma značajna osobina belog šuma je da je on izvod Vinerovog procesa W_t ako oba procesa posmatramo kao uopštene stohastičke procese. To opravdava notaciju

$$\xi_t = \dot{W}_t, \tag{3}$$

što često srećemo u literaturi.

Naravno, onda imamo da je, obrnuto

$$W_t = \int_0^t \xi_s\, ds. \tag{4}$$

Iz (2) vidimo da je

$$C_\xi(\varphi, \psi) = 0 \ \text{ ako } \ \varphi(t) \cdot \psi(t) = 0,$$

to jest, slučajne promenljive $\Phi_\xi(\varphi)$ i $\Phi_\xi(\psi)$ su nezavisne u ovom slučaju. Kažemo da uopšteni stohastički proces sa ovom osobinom *ima u svakoj tački nezavisne vrednosti.*

Iako stacionaran Gausovski proces ξ_t sa svuda konstantnom spektralnom gustinom u klasičnom smislu ne postoji, ovakav koncept belog šuma se pokazao kao veoma korisna matematička idealizacija. Štaviše, iz jednačina (3) i (4) vidimo da je ξ_t samo izvod klasičnog stohastičkog procesa i da je, zbog toga, samo uglačavajući efekat obične integracije potreban da "vratimo" ξ_t na klasičan proces, na proces W_t. Ovo poslednje je takodje razlog što diferencijalne jednačine sa belim šumom prebacujemo u integralni oblik.

Iako sam nije klasičan stohastički poces, nije teško pokazati da beli šum može da se aproksimira običnim (klasičnim) stacionarnim Gausovskim stohastičkim procesom.

Na kraju recimo još i to da je, zbog nezavisnosti vrednosti u svakoj tački, beli šum pogodan za opisivanje brzo fluktuirajućih slučajnih pojava za koje korelacija stanja u trenutku t i stanja u trenutku s postaje mala veoma brzo.

GLAVA 3

Stohastički integrali

1. Uvod

Analiza stohastičkih dinamičkih sistema često podrazumeva razmatranje diferencijalnih jednačina oblika

$$\dot{X}_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \tag{5}$$

gde je ξ_t m-dimenzionalni beli šum, X_t i f su $\mathbb{R}^d$-vrednosne funkcije i $G(t,x) = (G_{ij}(t,x))$ je $(d \times m)$ matrica.

Kao što smo videli u prethodnoj glavi, iako ξ_t nije klasičan stohastički proces, integral od ξ_t se može identifikovati sa m-dimenzionalnim Vinerovim procesom W_t:

$$W_t = \int_0^t \xi_s \, ds$$

ili, simbolično

$$dW_t = \xi_t \, dt.$$

Rešenje determinističkog početnog problema

$$\dot{x}_t = f(t, x_t), \quad x_{t_0} = c$$

za neprekidnu funkciju $f(t,x)$ je ekvivalentno rešenju integralne jednačine

$$x_t = c + \int_{t_0}^t f(s, x_s) \, ds,$$

za koju je moguće naći krivu rešenja klasičnom procedurom iteracije. Na isti način transformišemo jednačinu (5) u integralnu jednačinu

$$X_t = C + \int_{t_0}^t f(s, X_s) + \int_{t_0}^t G(s, X_s)\xi_s \, ds, \tag{6}$$

gde je C proizvoljna slučajna promenljiva.

Prvi integral sa desne strane u jednačini (6) možemo shvatiti kao nešto blisko Rimanovom integralu. Drugi, integral je "veći problem".

Sad formalno eliminišemo beli šum u jednačini (6) koristeći odnos $dW_t = \xi_t \, dt$, pišući

$$\int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\xi_s \, ds = \int_{t_0}^{t} G(s, X_s) \, dW_s, \tag{7}$$

tako da (6) postaje

$$X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s) + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s) \, dW_s. \tag{8}$$

Jendačina (8) može biti jednostavnije zapisana u diferencijalnom obliku

$$dX_t = f(t, X_t) + G(t, X_t) \, dW_t. \tag{9}$$

Naš cilj je da definišemo integral

$$X_t = X_t(\omega) = \int_{t_0}^{t} G(s) dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s, \omega) dW_s(\omega),$$

za što je moguće širu klasu $(d \times m)$-vrednosnih funkcija (matrica) G.

Na primer, za $G \equiv 1$ i $d = m = 1$, je

$$\int_{t_0}^{t} dW_s = W_t - W_{t_0}$$

pošto svaka aproksimacija integrala sredinama Riman-Stiltesovih suma oblika

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} G(\tau_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \ t_0 \leq t_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = t, \ t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$$

dovodi do te vrednosti.

Situacija se razlikuje kada je G "iregularno" koliko i W_t.

Razmotrimo slučaj kada je $G(t) = W_t$, $d = m = 1$. Integral koji sada posmatramo je

$$X_t = \int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s.$$

Formalna primena klasične integracije dovodi do

$$\int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s = \frac{W_t^2 - W_{t_0}^2}{2}. \tag{10}$$

Medjutim, takav račun pretpostavlja postojanje integrala kao običnog Riman-Stiltesovog integrala, to jest, pretpostavlja konvergenciju sume

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{\tau_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

sa svuda konačnom podelom i proizvoljnim izborom tačaka τ_i.

Madjutim, može se pokazati da limit sume S_n zavisi od izbora tačaka podele τ_i. Tačnije, može se pokazati da ako izaberemo

$$\tau_i = (1-a)t_{i-1} + at_i, \;\; 0 \le a \le 1, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

onda

$$sk - \lim_{\delta_n \to 0} Sn = \frac{W_t^2 - W_{t_0}^2}{2} + \left(a - \frac{1}{2}\right)(t - t_0) := ((a)) \int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s,$$

gde je $sk - \lim\limits_{\delta_n \to 0}$ srednje kvadratni limit kada $\delta_n = \max(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Specijalno, ako izaberemo $a = 0$, to jest $\tau_i = t_{i-1}$, dobijamo *Itov stohastički integral* koji je medju integralima tipa $((a)) \int_{t_0}^{t} W_s \;\; dW_s$ okarakterisan činjenicom da je martingal, što se može vrlo jednostavno pokazati.

Vidimo da je Itov stohastički integral

$$((0)) \int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s = \frac{W_t^2 - W_{t_0}^2}{2} - \frac{t - t_0}{2}. \tag{11}$$

Jednačina (11) se ne poklapa sa vrednošću u (10) koju smo dobili formalnom primenom klasične integracije. Ovaj "problem" se može otkloniti izborom $a = 1/2$. Primena klasičnog Riman-Stiltesovog kalkulusa je upravo i bila motivacija za definisanje *Stratonovičevog stohastičkog integrala* $((1/2)) \int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s$. U tom slučaju je

$$((1/2)) \int_{t_0}^{t} W_s \, dW_s = \frac{W_t^2 - W_{t_0}^2}{2}.$$

2. Neanticipirajuće funkcije

Neka je W_t m-dimenzionalni Vinerov proces na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Uvedimo oznaku za sigma algebru

$$\mathcal{W}[t_0, s] = \mathcal{F}(W_u \; ; \; t_0 \leq u \leq s)$$

i za sigma algebru

$$\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{F}(W_s - W_t \; ; \; t \leq s < \infty).$$

Kako W_t ima nezavisne priraštaje, $\mathcal{W}[t_0, t]$ i $\mathcal{W}_t^+$ su nezavisni.

Neka je t_0 fiksiran nenegativan broj. Familija $\mathcal{F}_t$, $t \geq t_0$, subsigma algebri od $\mathcal{F}$ je *neanticipirajuća* u odnosu na m-dimenzionalni Vinerov proces W_t ako ima sledeće osobine:

(a) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $t_0 \leq s \leq t$.

(b) $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{W}[t_0, t]$, $t_0 \leq t$.

(c) $\mathcal{F}_t$ je nezavisno od $\mathcal{W}_t^+$, $t_0 \leq t$.

Familija $\mathcal{F}_t = \mathcal{W}[t_0, t]$ je najmanja moguća neanticipirajuća familija sigma algebri. Ipak, često je neophodno i poželjno proširiti $\mathcal{W}[t_0, t]$ drugim dogadjajima koji su nezavisni od $\mathcal{W}_t^+$, kao što su, na primer, početni uslovi. Stoga, u slučaju stohastičkih diferencijalnih jednačina, obično uzimamo $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(\mathcal{W}[t_0, s], C)$, gde je početni uslov C slučajna promenljiva nezavisna od $\mathcal{W}_{t_0}^+$.

Kažemo da je $(d \times m)$-vrednosna funkcija (matrica) $G = G(s, \omega)$ koja je definisana na $[t_0, t] \times \Omega$ i koja je merljiva po (s, ω) *neanticipirajuća* (u odnosu na familiju $\mathcal{F}_s$ neanticipirajućih sigma algebri) ako je $G(s, \cdot)$ $\mathcal{F}_s$-merljivo za sve $s \in [t_0, t]$.

Sa $M_2^{d,m}[t_0, t] = M_2[t_0, t]$ ćemo označavati skup svih onih neanticipirajućih funkcija definisanih na $[t_0, t] \times \Omega$ čije su trajektorije $G(\cdot, \omega)$ elementi $L_2[t_0, t]$ sa verovatnoćom 1, to jest, sa verovatnoćom 1 važi

$$\int_{t_0}^{t} |G(s, \omega)|^2 \, ds < \infty.$$

3. Definicija i osobine stohastičkog integrala

Cilj nam je da definišemo stohastički integral

$$\int_{t_0}^{t} G(s)dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s,\omega)dW_s(\omega)$$

za proizvoljno $t \geq t_0$ i sve $G \in M_2^{d,m}[t_0,t] = M_2[t_0,t]$.

Ovo ćemo uraditi u dva koraka. Prvo definišemo ovaj integral za takozvane step funkcije (funkcije koraka) u $M_2[t_0,t]$. U drugom koraku proširujemo našu definiciju na ceo skup $M_2[t_0,t]$ tako što proizvoljnu funkciju iz $M_2[t_0,t]$ aproksimiramo pomoću step funkcija istog prostora.

Funkcija $G \in M_2[t_0,t]$ se zove *step funkcija* ako postoji dekompozicija $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ tako da $G(s) = G(t_{i-1})$ za sve $s \in [t_{i-1}, t_i)$, gde $i = 1, \ldots, n$.

Za takve step funkcije definišemo *stohastički integral* od G u odnosu na W_t kao $\mathbb{R}^d$-vrednosnu slučajnu promenljivu:

$$\int_{t_0}^{t} G(s)dW_s = \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \tag{12}$$

U cilju definisanja stohastičkog integrala za proizvoljnu funkciju G iz $M_2[t_0,t]$ primetimo, najpre, da je skup step funkcija gust u $M_2[t_0,t]$ u smislu sledeće leme:

Lema 3.1. *Za svaku funkciju $G \in M_2[t_0,t]$ postoji niz step funkcija $G_n \in M_2[t_0,t]$ takav da*

$$ss - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} |G(s) - G_n(s)|^2 \, ds = 0,$$

gde $ss - \lim\limits_{n\to\infty}$ predstavlja skoro siguran limit kada $n \to \infty$.

Lema 3.2. *Neka je $G \in M_2[t_0,t]$ step funkcija. Za svako $N > 0$ i $c > 0$ važi*

$$P\left[\left|\int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s\right| > c\right] \leq \frac{N}{c^2} + P\left[\int_{t_0}^{t} |G(s)|^2 \, ds > N\right].$$

Lema 3.3. *Neka je $G \in M_2[t_0,t]$ i neka je $G_n \in M_2[t_0,t]$ niz step funkcija za koji*

$$st - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} |G(s) - G_n(s)|^2\, ds = 0, \tag{13}$$

gde $st - \lim\limits_{n\to\infty}$ predstavlja stohastički limit ili limit u verovatnoći kada $n \to \infty$.

Ako definišemo $\displaystyle\int_{t_0}^{t} G_n(s)\, dW_s$ jednačinom (12) tada

$$st - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} G_n(s)\, dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s = I(G),$$

gde je $I(G)$ slučajna promenljiva koja ne zavisi od izbora niza $\{G_n\}$.

Za svaku $(d \times m)$-vrednosnu funkciju $G \in M_2[t_0,t]$, *stohastički integral* od G u odnosu na m-dimenzionalni Vinerov proces W_t je slučajna promenljiva $I(G)$ koja je, na osnovu leme 3.3, skoro sigurno jedinstveno odredjena sa

$$I(G) = \int_{t_0}^{t} G(s) dW_s = st - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} G_n(s)\, dW_s,$$

gde je $\{G_n\}$ niz step funkcija iz $M_2[t_0,t]$ koji aproksimira G u smislu da je

$$st - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} |G(s) - G_n(s)|^2\, ds = 0.$$

Za specijalne funkcije iz $M_2[t_0,t]$ možemo dati i jače aproksimacije stohastičkog integrala, kao što tvrdi sledeća lema:

Lema 3.4. *Za svaku funkciju $G \in M_2[t_0,t]$ takvu da*

$$\int_{t_0}^{t} E(|G(s)|^2)\, ds < \infty$$

postoji niz step funkcija $G_n \in M_2[t_0,t]$ sa istom osobinom, takav da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} E(|G_n(s) - G(s)|^2)\, ds = 0$$

i da je

$$sk - \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} G_n(s)\, dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s.$$

U teoremi 3.1 navodimo neke važne osobine stohastičkog integrala od kojih se za osobine (a), (b), (c) i (e) pokaže da važe najpre na skupu step funkcija iz $M_2[t_0,t]$, a zatim se proširuju na čitav skup $M_2[t_0,t]$.

Teorema 3.1. *Neka su G, G_1, G_2 i G_n $(d\times m)$-vrednosne funkcije iz $M_2[t_0,t]$ i neka je W_t m-dimenzionalni Vinerov proces. Stohastički integral definisan gore ima sledeće osobine:*

(a) *Za $a,b\in\mathbb{R}$ važi*

$$\int_{t_0}^{t}(aG_1(s)+bG_2(s))\ dW_s = a\int_{t_0}^{t}G_1(s)\,dW_s + b\int_{t_0}^{t}G_2(s)\,dW_s.$$

(b) $$\int_{t_0}^{t}G(s)dW_s=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}G_{1_k}(s)dW_s^k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}G_{d_k}(s)dW_s^k\end{pmatrix},\quad W_t=\begin{pmatrix}W_t^1\\ \vdots\\ W_t^m\end{pmatrix}.$$

(c) *Za $N>0$ i $c>0$ je*

$$P\left[\left|\int_{t_0}^{t}G(s)\,dW_s\right|>c\right]\le\frac{N}{c^2}+P\left[\int_{t_0}^{t}|G(s)|^2\,ds>N\right].$$

(d) *Odnos*

$$st-\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}|G(s)-G_n(s)|^2\,ds=0$$

implicira

$$st-\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}G_n(s)\,dW_s=\int_{t_0}^{t}G(s)\,dW_s,$$

gde G_n ne moraju biti step funkcije.

(e) *Ako*

$$\int_{t_0}^{t}E(|G(s)|^2)\,ds<\infty$$

tada je vektor očekivanja stohastičkog integrala

$$E\left(\int_{t_0}^{t}G(s)\,dW_s\right)=0,$$

a za njegovu kovarijansnu matricu važi

$$E\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s\right)\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s\right)' = \int_{t_0}^{t} E(G(s)G'(s))\, ds,$$

odakle, specijalno,

$$E\left(\left|\int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s\right|^2\right) = \int_{t_0}^{t} E(|G(s)|^2)\, ds.$$

Teorema 3.2. *Ako je*

$$\int_{t_0}^{t} |G(s)|^2\, ds = 0 \ \ \textit{sa verovatnoćom}\ 1,$$

gde $G \in M_2[t_0, t]$, *tada*

$$\int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s = 0 \ \ \textit{sa verovatnoćom}\ 1.$$

4. Stohastički integral kao stohastički proces

Neka W_t opet označava m-dimenzionalni Vinerov proces. Neka je t_0 fiksiran nenegativan broj. Neka je $\{\mathcal{F}_t \; ; \; t \geq t_0\}$ familija neanticipirajućih sigma algebri.

U prošlom odeljku smo definisali stohastički integral

$$\int_{t_0}^{T} G(s) dW_s = \int_{t_0}^{T} G(s, \omega) dW_s(\omega)$$

za $G \in M_2[t_0, T]$.

Neka je $A \subset [t_0, T]$ Borelov skup i I_A njegova indikator funkcija. Tada $GI_A \in M_2[t_0, T]$.

Zato definišemo

$$\int_A G(s)\, dW_s = \int_{t_0}^{T} G(s) I_A\, dW_s.$$

Za svaka dva Borelova skupa $A, B \subset [t_0, T]$ koji se ne seku imamo

$$\int_{A \cup B} G(s)\, dW_s = \int_A G(s)\, dW_s + \int_B G(s)\, dW_s.$$

Specijalno, za $t_0 \leq a \leq b \leq c \leq T$ važi

$$\int_a^c G(s)\, dW_s = \int_a^b G(s)\, dW_s + \int_b^c G(s)\, dW_s.$$

Specijalno, za svako $G \in M_2[t_0, T]$,

$$X_t = \int_{t_0}^{t} G(s)dW_s = \int_{t_0}^{T} G(s)\ I_{[t_0,t]}dW_s, \quad t_0 \le t \le T,$$

jeste jedan $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces (jedinstven do na stohastičku ekvivalenciju) za sve $t \in [t_0, T]$ tako da je $X_{t_0} = 0$ skoro sigurno.

Naravno,

$$X_t - X_s = \int_{s}^{t} G(u)dW_u, \quad t_0 \le s \le t \le T.$$

Ako $G \in M_2[t_0, t]$, za svako $t \ge t_0$, tada je stohastički proces X_t definisan za sve $t \ge t_0$.

Teorema 3.3. *Neka je $G \in M_2[t_0, T]$ i neka je*

$$X_t = \int_{t_0}^{t} G(s)dW_s, \quad t_0 \le t \le T,$$

Tada sledeće važi:

(a) *X_t je $\mathcal{F}_t$-merljivo (i zato neanticipirajuće).*

(b) *Neka je*

$$\int_{t_0}^{t} E(|G(s)|^2)\, ds < \infty, \quad \text{za sve } t \le T.$$

Tada je $(X_t, \mathcal{F}_t)$ za $t \in [t_0, T]$ jedan $\mathbb{R}^d$-vrednosni martingal, to jest, za $t_0 \le s \le t \le T$ je

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s.$$

Štaviše, za $s, t \in [t_0, T]$ je očekivanje tog martingala

$$E(X_t) = 0,$$

a za njegovu kovarijansnu matricu važi

$$E(X_t X_s') = \int_{t_0}^{\min(t,s)} E(G(u)G'(u))\, du,$$

odakle, specijalno,

$$E(|X_t|^2) = \int_{t_0}^{t} E(|G(u)|^2)\, du.$$

Takodje, za sve $c \geq 0$ *i* $t_0 \leq a \leq b \leq T$ *važi*

$$P\left[\sup_{a\leq t\leq b} |X_t - X_a| > c\right] \leq \frac{\int_a^b E(|G(s)|^2)\, ds}{c^2}$$

i važi

$$E\left(\sup_{a\leq t\leq b} |X_t - X_a|^2\right) \leq 4 \int_a^b E(|G(s)|^2)\, ds.$$

(c) X_t *ima neprekidne trajektorije sa verovatnoćom 1.*

(d) *Ako za neki prirodan broj* k *važi*

$$\int_a^t E(|G(s)|^{2k})\, ds < \infty, \quad t_0 \leq a \leq t \leq T,$$

tada je

$$E\left(|X_t - X_a|^{2k}\right) \leq (k(2k-1))^{k-1}(t-a)^{k-1} \int_a^t E(|G(s)|^{2k})\, ds.$$

GLAVA 4

Stohastički diferencijali

1. Osnovni pojmovi

Odnos

$$X_t(\omega) = \int_{t_0}^{t} G(s,\omega)\, dW_s(\omega)$$

možemo zapisati kao $dX_t = G(t)\ dW_t$. To je specijalan, takozvani stohastički diferencijal. U cilju davanja definicije i ispitivanja takvih diferencijala posmatrajmo stohastički proces oblika

$$(14) \qquad X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^{t} f(s,\omega)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s,\omega)\, dW_s(\omega).$$

Pretpostavke su uobičajene: W_t je m-dimenzionalni Vinerov proces, t_0 je fiksiran nenegativan broj, $\{\mathcal{F}_t \ ; \ t \geq t_0\}$ je "prateća" familija neanticipirajućih sigma algebri sa dogadjajima nezavisnim od $\mathcal{W}_t^+$ i G je $(d \times m)$-vrednosna funkcija iz $M_2^{d,m}[t_0,t] = M_2[t_0,t]$. Tada je stohastički integral u (14) potpuno definisan za $t \in [t_0,T]$.

Na X_{t_0} i funkciju f dajemo sledeće pretpostavke:

(a) X_{t_0} je $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva (i kao takva nezavisna od $\mathcal{W}_{t_0}^+$ pa zato i od $W_t - W_{t_0}$ za $t \leq t_0$). Specijalno, to je slučaj kada je X_{t_0} deterministička veličina.

(b) Funkcija f je jedna $\mathbb{R}^d$-vrednosna funkcija merljiva po (s,ω) i neanticipirajuća (tj., $f(t,\cdot)$ je $\mathcal{F}_t$-merljiva za sve $t \in [t_0,T]$) i važi

$$\int_{t_0}^{T} |f(s,\omega)|\, ds < \infty, \ \text{ sa verovatnoćom 1.}$$

Poslednji integral interpretiramo kao Lebegov ili, ako je moguće, Rimanov integral trajektorija $f(\cdot,\omega)$.

Oba integrala u (14) su neprekidne odozgo funkcije (integral od f je, ustvari, apsolutno neprekidan), tako da je X_t jedan $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces koji, sa verovatnoćom 1, ima neprekidne trajektorije. Štaviše, X_t je $\mathcal{F}_t$-merljivo i zato neanticipirajuće i važi

$$X_t = X_s + \int_s^t f(u)\,du + \int_s^t G(u)\,dW_u,$$

za svako s takvo da je $t_0 \le s \le t \le T$.

Kažemo da stohastički proces X_t definisan jednačinom (14) ima *stohastički diferencijal*

$$dX_t = f(t)\,dt + G(t)\,dW_t. \tag{15}$$

Pri prelasku sa (14) i (15) početna vrednost X_{t_0} nestaje , tako da se iz (15) mogu dobiti samo razlike

$$X_t - X_s = \int_s^t f(u)\,du + \int_s^t G(u)\,dW_u,$$

i mora se naglasiti kada je X_{t_0} različito od nule.

Primer 4.1. *Neka je $d = m = 1$, $t_0 = 0$ i T proizvoljan pozitivan broj. Diferencijalna notacija za*

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$

je

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t\,dW_t. \tag{16}$$

Ako napravimo diferencijal od W_t^2 formalno, koristeći Tejlorovu teoremu, dobijamo

$$d(W_t^2) \simeq 2W_t\,dW_t + (dW_t)^2. \tag{17}$$

Poredjenje (16) i (17) pokazuje, da bi u slučaju stohastičkog diferencijala od W_t^2 morali zameniti $(dW_t)^2$ sa dt.

2. Itova teorema

Opšti slučaj

Teorema 4.1. *Neka je $u = u(t,x)$ neprekidna funkcija definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^k$ i sa neprekidnim parcijalnim izvodima (koji su k-vektori)*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = u_t,\\
&\frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x) = u_{x_i},\ x = (x_1, \ldots, x_d)\\
&\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} u(t,x) = u_{x_i x_j},\ i,j \leq d.
\end{aligned}$$

Neka je d-dimenzionalni stohastički proces X_t definisan na $[t_0, T]$ stohastičkim diferencijalom

$$dX_t = f(t)\,dt + G(t)\,dW_t,$$

u odnosu na m-dimenzionalni Vinerov proces W_t.

Tada k-dimenzionalni stohastički proces

$$Y_t = u(t, X_t)$$

definisan na $[t_0, T]$ i sa početnom vrednošću

$$Y_{t_0} = u(t_0, X_{t_0})$$

takodje ima stohastički diferencijal u odnosu na isti Vinerov proces W_t:

$$\begin{aligned}
dY_t &= \left(u_t(t,X_t) + u_x(t,X_t) f(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j}(t,X_t) (G(t)G'(t))_{ij} \right) dt\\
&+ u_x(t,X_t) G(t)\,dW_t,
\end{aligned}$$

ili, što je isto,

$$dY_t = u_t(t,X_t)\,dt + u_x(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\,tr(G(t)G'(t)u_{xx})\,dt,$$

gde $tr A$ označava trag matrice A.

Itova teorema za slučaj k = m = 1

Sada ćemo dati specijalan oblik Itove teoreme za slučaj $k = m = 1$, koji je važan za mnoge primene.

Teorema 4.2. *Neka je $u = u(t, x)$ neprekidna funkcija definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ sa vrednostima u $\mathbb{R}$ i sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_{x_i} i $u_{x_i x_j}$, $i, j \leq d$.*

Neka su d jednodimenzionalnih stohastičkih procesa X_t definisanih na $[t_0, T]$ stohastičkim diferencijalima

$$dX_i(t) = f_i(t)\, dt + G_i(t)\, dW_t,\ i = 1, 2, \ldots, d,$$

u odnosu na isti jednodimenzionalni Vinerov proces W_t.

Tada stohastički proces

$$Y_t = u(t, X_1(t), \ldots, X_d(t))$$

takodje ima stohastički diferencijal u odnosu na isti Vinerov proces W_t:

$$dY_t = u_t\, dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i}\, dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j}\, dX_i\, dX_j. \tag{18}$$

Ovde proizvod $dX_i\, dX_j$ može biti izračunat iz sledeće tablice

$\times$	dW_t	dt
dW_t	dt	0
dt	0	0

pa tako dobijamo

$$dX_i\, dX_j = G_i G_j\, dt,\ \ i, j \leq d.$$

Zato, jednačinu (18) drugačije možemo zapisati kao

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} G_i G_j \right) dt + \left(\sum_{i=1}^{d} u_{x_i} G_i \right) dW_t.$$

Itova teorema za slučaj k = d = m = 1

Teorema 4.3. *Neka je* $u = u(t,x)$ *skalarna neprekidna funkcija definisana na* $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ *sa neprekidnim parcijalnim izvodima* u_t, u_x *i* u_{xx}. *Neka je jednodimenzionalni stohastički proces* X_t *definisan na* $[t_0, T]$ *stohastičkim diferencijaloma*

$$dX_t = f(t)\,dt + G(t)\,dW_t,$$

gde su f *i* G *skalarne funkcije i* W_t *jednodimenzionalni Vinerov proces.*

Tada stohastički proces $Y_t = u(t, X_t)$ *takodje ima stohastički diferencijal u odnosu na isti Vinerov proces* W_t*:*

$$dY_t = \left(u_t(t,X_t) + u_x(t,X_t) f(t) + \frac{1}{2} u_{xx}(t,X_t) G^2(t) \right) dt + u_x(t,X_t) G(t)\,dW_t.$$

3. Neki primeri vezani za Itovu teoremu

Primer 4.2. *Pretpostavimo da postoje diferencijali jednodimenzionalnih stohastičkih procesa* $X_1(t)$ *i* $X_2(t)$*:*

$$dX_1(t) = f_1(t)\,dt + G_1(t)\,dW_t$$
$$dX_2(t) = f_2(t)\,dt + G_2(t)\,dW_t.$$

U slučaju kada je $u(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$ *druga verzija Itove teoreme (teorema 4.2) dovodi nas do stohastičkog diferencijala*

$$\begin{aligned} d(X_1(t)X_2(t)) &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + G_1(t)G_2(t)dt \\ &= (X_1(t)f_2(t) + X_2(t)f_1(t) + G_1(t)G_2(t))dt \\ &+ (X_1(t)G_2(t) + X_2(t)G_1(t))dW_t. \end{aligned}$$

Ovo je pravilo parcijalne integracije za stohastičke integrale.

U integralnom obliku to je

$$\begin{aligned} X_1(t)X_2(t) &= X_1(t_0)X_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(t)dX_2 \\ &+ \int_{t_0}^{t} X_2(t)dX_1 + \int_{t_0}^{t} G_1(t)G_2(t)ds, \quad t_0 \le t \le T. \end{aligned}$$

U poredjenju sa odgovarajućom formulom za obične integrale ili diferencijale, postoji dodatni član

$$G_1(t)G_2(t)dt = G_1(t)G_2(t)(dW_t)^2.$$

Ako izaberemo $X_1(t) = t$ *i* $X_2(t) = W_t$ *dobijamo*

$$d(tW_t) = W_t\, dt + t\, dW_t,$$

a ako izaberemo $X_1(t) = X_2(t) = W_t$ *dobijamo poznati rezultat*

$$d(W_t^2) = 2W_t\, dW_t + dt.$$

Primer 4.3. *Neka je* $X_t = W_t$ *jednodimenzionalni Vinerov proces. Za situaciju kada je funkcija* $u = (t, x)$, $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, *neprekidno diferencijabilna u odnosu na* t *i dva puta neprekidno diferencijabilna u odnosu na* x, *treća verzije Itove teoreme (teorema 4.3) nam daje*

$$du(t, W_t) = \left(u_t(t, W_t) + \frac{1}{2}\, u_{xx}(t, W_t) \right) dt + u_x(t, W_t)\, dW_t.$$

Ako je, specijalno, $u = u(x)$ *nezavisno od* t *i dva puta neprekidno diferencijabilno u odnosu na* x, *dobijamo*

$$du(W_t) = u'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2}\, u''(W_t)\, dt. \tag{19}$$

ili, što je isto

$$u(W_t) = u(0) + \int_0^t u'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t u''(W_s)\, ds. \tag{20}$$

Jednačine (19) i (20) pokazuju esencijalne karakteristike kalkulusa sa stohastičkim integralima. Jednačina (20) se ponekad zove fundamentalna teorema kalkulusa sa stohastičkim integralima.

Primer 4.4. *Za* $u(x) = x^n$, *gde* $n = 1, 2, \ldots,$ *i* $t \geq 0$, *formula (19) nam daje*

$$d(W_t^n) = n\, W_t^{n-1}\, dW_t + \frac{n(n-1)}{2}\, W_t^{n-2}\, dt.$$

Specijalno, za $n = 2$ *dobijamo dobro poznatu formulu*

$$d(W_t^2) = 2W_t\, dW_t + dt.$$

GLAVA 5

Stohastičke diferencijalne jednačine

1. Definicija i primeri

Posmatramo stohastički diferencijal oblika

$$(21) \quad dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty$$

ili, u integralnom obliku

$$(22) \quad X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,$$

gde je X_t $\mathbb{R}^d$-vrednosni stohastički proces definisan na $[t_0, T]$ i W_t je m-dimenzionalni Vinerov proces.

Za $\mathbb{R}^d$-vrednosnu funkciju f i $(d \times m)$-vrednosnu matricu G pretpostavljamo da su definisane i merljive na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$. Takodje, pretpostavljamo da su, za fiksirano (t, x), funkcije $f(t, x)$ i $G(t, x)$ nezavisne od $\omega \in \Omega$, to jest, da se slučajni parametar ω pojavljuje samo indirektno u koeficijentima $f(t, X_t(\omega))$ i $G(t, X_t(\omega))$ jednačine (21).

Proces X_t mora biti konstruisan na takav način da, nakon zamene u (21), desni član postane stohastički diferencijal u smislu prethodne priče vezane za stohastičke diferencijale.

Specijalno, X_t mora biti $\mathcal{F}_t$-merljivo, pa zato i neanticipirajuće.

Jednačine (21) i (22) definišu stohastički proces X_t sa datom početnom vrednošću $X_{t_0} = C$.

Za odgovarajuću algebru sigma algebri $\{\mathcal{F}_t \ ; \ t \geq t_0\}$ uvešćemo sledeću konvenciju:

Radi tretiranja stohastičkih diferencijalnih jednačina na intervalu $[t_0, T]$ uvek je dovoljno izabrati za $\mathcal{F}_t$ najmanju sigma algebru u odnosu na koju su početna vrednost C i slučajne promenljive W_s, za $s \leq t$, merljive, specijalno

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(C\ ;\ W_s,\ s \leq t).$$

Po definiciji $\mathcal{F}_t$ mora biti, za sve $t \geq t_0$, nezavisno od

$$\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{F}(W_s - W_t\ ;\ t \leq s < \infty).$$

Specijalno, za $t = t_0$ to znači da početna vrednost C i Vinerov proces $W_t - W_{t_0}$ moraju biti nezavisni. Ako je C konstanta onda je to trivijalno zadovoljeno i u tom slučaju imamo (osim za dogadjaje sa verovatnoćom nula)

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{W}[0,t] = \mathcal{F}(W_s,\ s \leq t).$$

Naravno, $\mathcal{F}_t$ se uvek može proširiti svim dogadjajima koji su nezavisni od $\mathcal{W}_t^+$. Kada $\mathcal{F}_t$ nije precizno navedeno uvek ćemo pretpostaviti da je zadato kao gore.

Jednačina oblika (21) se zove *stohastička diferencijalna jednačina*. Slučajna promenljiva $X_{t_0} = C$ se zove *početna vrednost u* t_0. Jednačina (21) jeste samo simbolički način za zapisivanje *stohastičke integralne jednačine* (22).

Stohastički proces X_t se zove *rešenje* stohastičke diferencijalne jednačine (21) na intervalu $[t_0, T]$ ako ima sledeće osobine:

(a) X_t je $\mathcal{F}_t$-merljivo (i zato neanticipirajuće).

(b) Funkcije $\bar{f}(t,\omega) = f(t, X_t(\omega))$ i $\bar{G}(t,\omega) = G(t, X_t(\omega))$ (neanticipirajuće zbog (a)) su takve da, sa verovatnoćom 1, važi

$$\int_{t_0}^{T} |\bar{f}(s,\omega)|\ ds < \infty$$

i

$$\int_{t_0}^{T} |\bar{G}(s,\omega)|^2\ ds < \infty,$$

(to jest, $\bar{G} \in M_2^{d,m}[t_0, T]$).

(c) Jednačina (22) važi za sve $t \in [t_0, T]$ sa verovatnoćom 1.

Ako je X_t rešenje jednačine (21) i (22), tada je svaki stohastički proces koji je ekvivalentan procesu X_t takodje rešenje tih jednačina. Specijalno, ako je, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$,

$$X_t = \bar{X}_t \quad \text{sa verovatnoćom } 1,$$

(gde skup na kome to ne važi mora pripadati $\mathcal{F}_t$), tada je

$$\int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{X}_s)\, ds$$

i

$$\int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s, \bar{X}_s)\, dW_s.$$

Zamenom rešenja (za koje ćemo pretpostaviti da postoji) u desnu stranu (22) dobijamo neprekidnu funkciju od t koja, obzirom da je rešenje, jeste u isto vreme skoro sigurno jednaka desnoj strani. Sledi da, za svako rešenje jednačine (21), postoji njemu stohastički ekvivalentno rešenje sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama. Dakle, *uvek ćemo razmatrati neprekidna rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina.*

Primer 5.1. *Ako je $G \equiv 0$, fluktuirajući član u (21) nestaje. Tada (21) interpretiramo kao običnu diferencijalnu jednačinu*

$$\dot{X}_t = f(t, X_t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

sa početnom vrednošću $X_{t_0} = C$. Slučajni uticaj se može pojaviti samo u početnoj vrednosti C.

Primer 5.2. *Ako funkcije $f(t,x) = f(t)$ i $G(t,x) = G(t)$ ne zavise od $x \in \mathbb{R}^d$ i ako $f \in L_1[t_0, T]$ i $G \in L_2[t_0, T]$ tada*

$$dX_t = f(t)\, dt + G(t)\, dW_t$$

jeste stohastički diferencijal čiji koeficijenti ne zavise od X_t pa zato ne zavise ni od ω. Zato, na $[t_0, T]$, jedinstveno rešenje od (21) je

$$X_t(\omega) = C(\omega) + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s(\omega).$$

2. Postojanje i jedinstvenost rešenja

Da bismo obezbedili egziestenciju i jedinstvenost rešenja neke obične diferencijalne jednačine

$$\dot{X}_t = f(t, X_t), \quad X_{t_0} = C, \tag{23}$$

na intervalu $t \in [t_0, T]$, obično pretpostavljamo da $f(t, x)$ zadovoljava Lipšicov uslov po x i da je ograničeno po t za svako x. Ovi uslovi obezbedjuju da Pikar-Lindelofove iteracije

$$X_t^{(n)} = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s^{(n-1)})\, ds$$

konvergiraju ka rešenju integralne jednačine

$$X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds$$

koja je ekvivalentna jednačini (23).

Kako je obična diferencijalna jednačina (23) samo specijalan slučaj (za $G \equiv 0$) stohastičke diferencijalne jednačine

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t_0 \le t \le T < \infty$$

dovoljne uslove za egziestenciju i jedinstvenost rešenja te stohastičke diferencijalne jednačine ćemo modelovati po uzoru na klasičan slučaj. Važi sledeće tvrdjenje:

Teorema 5.1. *Neka je*

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t_0 \le t \le T < \infty \tag{24}$$

stohastička diferencijalna jednačina gde je W_t m-dimenzionalni Vinerov proces i C slučajna promenljiva nezavisna od $W_t - W_{t_0}$, za $t \ge t_0$.

Neka su $\mathbb{R}^d$-vrednosna funkcija $f(t, x)$ i $(d \times m)$-vrednosna matrica $G(t, x)$ definisane i merljive na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ i neka imaju sledeće osobine:

Postoji konstanta $K > 0$ takva da

(a) *(Lipšicov uslov)*

Za sve $t \in [t_0, T]$ i $x, y \in \mathbb{R}^d$ važi

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |G(t,x) - G(t,y)| \leq K\,|x - y|. \tag{25}$$

(b) *(Uslov restrikcije rasta)*

Za sve $t \in [t_0, T]$ i $x \in \mathbb{R}^d$ važi

$$|f(t,x)|^2 + |G(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2). \tag{26}$$

Tada jednačina (24) ima na $[t_0, T]$ jedinstveno $\mathbb{R}^d$-vrednosno rešenje X_t, koje zadovoljava početni uslov $X_{t_0} = C$.

Preciznije, ako su X_t i Y_t neprekidna rešenja jednačine (24) i ako je $X_{t_0} = Y_{t_0} = C$, tada je

$$P\left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0\right] = 0.$$

Postupak dokazivanja teoreme 5.1 se u osnovi sastoji od Pikar-Lindelofovog metoda iteracija i Borel-Kantelijeve leme koja omogućuje ocenu greške konvergencije u postupku iteracije.

3. Primeri i primedbe

Lipšicov uslov (25) iz teoreme 5.1 garantuje da se $f(t,x)$ i $G(t,x)$ ne menjaju brže po x od same funkcije x. To implicira, specijalno, neprekidnost funkcija $f(t,\cdot)$ i $G(t,\cdot)$ za sve $t \in [t_0, T]$.

Funkcije koje nisu neprekidne po x, pa čak i neke neprekidne po x, na primer, one tipa

$$f(t,x) = |x|^\alpha, \;\; 0 < \alpha < 1,$$

su isključene kao koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine (24).

Da bismo uključili funkcije kao što je, na primer, $\sin x^2$ kao koeficijente, potrebno je da u teoremi 5.1 Lipšicov uslov (25) zamenimo opštijim uslovom (generalizacijom uslova (25)):

Za svako $N > 0$ postoji konstanta K_N takva da, za sve $t \in [t_0, T]$, $|x| < N$ i $|y| < N$, važi

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |G(t,x) - G(t,y)| \leq K_N\,|x-y|. \tag{27}$$

Da bi Lipšicov uslov ili njegova generalizacija (27) bili zadovoljeni, dovoljno je da funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda u odnosu na komponente od x za svako $t \in [t_0,T]$ i da oni budu ograničeni na $[t_0,T] \times \mathbb{R}^d$ ili, u slučaju generalizacije Lipšicovog uslova, na $[t_0,T] \times \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ |x| < N\}$.

Prokomentarišimo sada uslov restrikcije rasta u teoremi 5.1 (nejednakost (26)). Ovaj uslov ograničava f i G uniformno u odnosu na $t \in [t_0,T]$ i dozvoljava najviše linearan rast tih funkcija po x. Ako narušimo taj uslov dobijamo efekat "eksplozije" rešenja, poznat iz teorije običnih diferencijalnih jednačina.

Ako su funkcije f i G definisane na $[t_0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ i ako pretpostavke teoreme 5.1 važe na svakom konačnom podintervalu $[t_0,T]$ intervala $[t_0,\infty)$, tada jednačina

$$X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s,X_s)\,ds + \int_{t_0}^{t} G(s,X_s)\,dW_s$$

ima jedinstveno rešenje X_t definisano na celoj polupravoj $[t_0,\infty)$. Takvo rešenje se zove *globalno rešenje.*

Primer 5.3. *Posmatrajmo autonomnu stohastičku diferencijalnu jednačinu*

$$X_t = f(X_t)\,dt + G(X_t)\,dW_t, \quad X_{t_0} = C.$$

Pod autonomnom stohastičkom diferencijalnom jednačinom podrazumevamo onu kod koje $f(t,x) = f(x)$ i $G(t,x) = G(x)$ ne zavise od t.

Za svaku početnu vrednost C koja je nazavisna od m-dimenzionalnog Vinerovog procesa $W_t - W_{t_0}$ za $t \geq t_0$, ova jednačina će imati tačno jedno neprekidno globalno rešenje X_t takvo da je $X_{t_0} = C$ ako važi samo sledeći globalni Lipšicov uslov:

Postoji pozitivna konstanta K takva da, za sve $x, y \in \mathbb{R}^d$, važi

$$|f(x) - f(y)| + |G(x) - G(y)| \leq K\ |x - y|.$$

Uslov restrikcije rasta za f i G sledi iz ovog globalnog Lipšicovog uslova (fiksiramo $y = y_0$).

Primer 5.4. *Posmatrajmo, za $d = m = 1$, stohastičku diferencijalnu jednačinu*

$$dX_t = g(t)X_t\, dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{28}$$

Pretpostavke teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja su zadovoljene ako je $g(t)$ merljiva i ograničena funkcija na $[t_0, T]$.

Jedinstveno rešenje jednačine (28) tada postoji i dato je sa

$$X_t = C\ \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s \right\}.$$